我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 XML
管理

<	2022年3月					>
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”

昵称： 我是8位的
园龄： 4年7个月
粉丝： 288
关注： 5
+加关注

搜索

找找看
谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

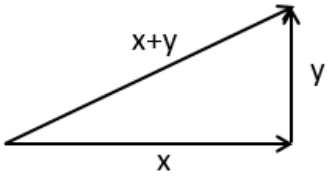
积分 - 457097
排名 - 1198

线性代数笔记17——正交向量与正交子空间

正交向量

正交是垂直的令一种说法，两个向量正交意味着两个向量的夹角是90°。

这可以用直角三角形的三边解释：



当x和y正交时，二者的点积是0，反过来也一样。这个结论在n维空间也适用，当R^n空间内的两个向量x和向量y正交时：

$$x \cdot y = x^T y = 0$$

如果x是零向量，$x^T y$还是0，也意味着零向量和任意向量正交。

正交子空间

正交性还可以推广到子空间，如果说一个子空间V和另一个子空间W正交，那么V中的每一个向量和W中的每一个向量正交。

子空间V的正交子空间W也称为V的正交补空间，或V的正交补，记作：

$$W = V^{\perp}$$

正交与垂直

以我们比较熟悉的三维空间为例，墙角就可以看作一个典型的空间坐标系，两个墙面和地面两两垂直，每个平面都是三维空间中的二维子空间，这是否意味着子空间的正交呢？并不是这样，两个平面垂直并不等同于两个子空间正交，可以轻易找出两个分属于两个平面但不垂直的向量。实际上，在墙壁与地面的交接处，沿着接缝方向的向量同属于两个平面，但它们不会自己正交与自己，除非是零向量。

这样看来，“正交是垂直的令一种说法”并不完全准确，实际上，正交一定垂直，垂直不一定正交。

通过平面的例子可以看出，如果两个子空间交于一个非零向量，那么这两个子空间一定不会正交。换句话说，如果两个子空间正交，它们只能交于零向量（单独的点就是零向量，它没有方向，或者说有任意方向，并且模长为0）。

在同一个平面中正交的例子有哪些呢？

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

回顾一下子空间的定义，如果V是R^n的线性子空间，则V一定满足三个条件：

1. 包含0向量；
2. x是V中的一个向量，x和一个标量的乘积也在V中，即数乘封闭性；
3. a和b是V中的向量，a+b也在V中，即加法封闭性。

由此可见平面内只有三个子空间：原点、过原点的直线、整个平面。这样一来答案就很清晰了：

1. 过原点的直线任何时候都不会和整个平面正交；
2. 原点和所有过原点的直线正交，也和整个平面正交；
3. 如果两个过原点的向量的点积是0，二者正交。

四个基本子空间的正交补

先看行空间如何正交与零空间。零空间的意义是Ax = 0时x的解集：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{0}$$

这样会发现，A中的每个行向量都正交于零空间中的x：

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a^{(i)}x = 0$$

$a^{(i)}$表示A中的第i行行向量，$a^{(i)}x = 0$当于一个向量垂直于一个超平面。当然，行空间不仅仅包括这几行，还包括它们的线性组合，只要证明满足加法和数乘封闭性即可：

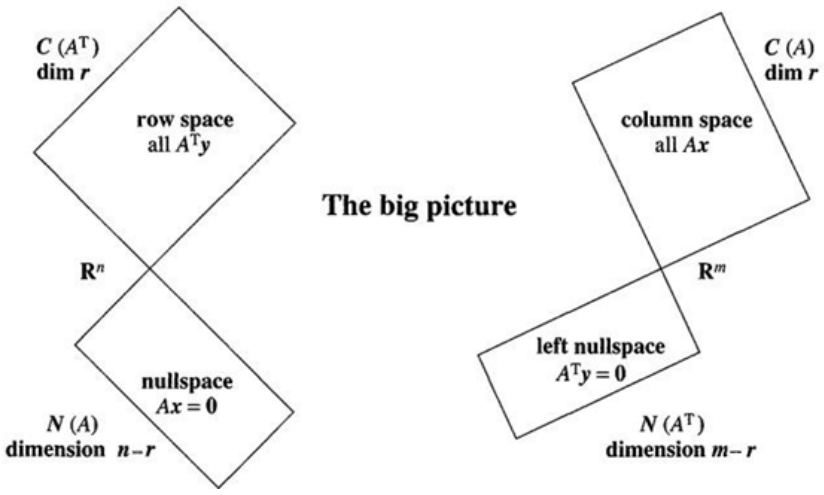
$$a^{(i)}x + a^{(j)}x = \left(a^{(i)} + a^{(j)}\right)x = 0$$

$$\left(ka^{(i)}\right)x = k\left(a^{(i)}x\right) = 0$$

列空间相当于A转置后的行空间，道理是一样的，所以列空间也正和零空间正交。

A是m×n矩阵，四个基本子空间的正交性可以用下图表示，其中r是矩阵的秩：

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解
写的很好，不过LU 分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵
--wiki3D
3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1（sin和cos）
很nice
--尹保棕
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
有些图片挂了呢
--ccchendada
5. Re:寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
$ v = {2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立座标系
--trustInU



这相当于把m维空间分割成两个子空间，n维空间分割成另两个子空间，子空间的维数满足图中的要求。如果用正交补的记法，上图可以看作：

$$N(A) = C(A)^{\perp} = C(A^T)^{\perp}$$

以三维空间中为例：

$$Ax = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 6 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

A的行向量是线性相关的，A的秩是1，所以行空间是1维的，是一条直线，与之正交的零空间是垂直于行向量的平面，<1, 3, 5>就是这个平面的法向量，由此可以得到平面方程：

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$$

作者：我是8位的

出处：http://www.cnblogs.com/bigmonkey

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”

随笔

分类: 线性代数

标签: 正交向量, 正交子空间, 正交补

好文要顶 关注我 收藏该文

我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
+加关注

0 推荐 0 反对

« 上一篇： 线性代数笔记16——图和网络
» 下一篇： 线性代数笔记18——投影矩阵和最小二乘

posted on 2018-10-31 16:53 我是8位的 阅读(5226) 评论(0) 编辑 收藏 举报

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论，立即 登录 或者 逛逛 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告
yozodcs.com
永中DCS_文档在线预览解决方案
兼容不同版本的Office、PDF等，特定格式的合作，支持Windows、信创环境下一键部署
打开

编辑推荐:
· 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
· 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
· ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
· .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
· 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

最新新闻:
· 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
· 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
· 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
· Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
· 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
» 更多新闻...

Powered by:
博客园
Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes